

ZiM– studia dzienne
Matematyka - Lista nr 5

Zadanie 1. Obliczyć $(A+B)^T$, A^T+B^T , $8A-12B$, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. Obliczyć $(2A-C)B$ oraz $2D^T C^T - D^T E$, gdy $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, natomiast macierze

A, B, D i E należy dobrać dowolnie, lecz nadając im takie wymiary, aby podane działania były wykonalne.

Zadanie 3. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonać działania lub uzasadnić, że nie jest ono wykonalne:

a) $A+B^T$, b) $3A-2B$, c) $A^T C^2$, d) $B^T C^T$, e) CA .

Zadanie 4. Uzupełnić puste “okienka” wartościami elementów macierzy tak, aby prawdziwe były następujące równości:

$$a) \begin{bmatrix} \square & 0 & -1 \\ 3 & 1 & \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \square & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & \square \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \square \\ -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Dana jest macierz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczyć $A^T A$ i AA^T . Sprawdzić, czy

otrzymane macierze są symetryczne.

Zadanie 6. Obliczyć wyznaczniki z macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7. Sprawdzić tożsamości:

$$a) \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r; \quad b) \begin{vmatrix} \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \\ r \cos \psi \cos \varphi & r \cos \psi \sin \varphi & -r \sin \psi \\ -r \sin \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \psi;$$

Zadanie 8. Znaleźć macierz X, gdy

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) X \bullet \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9 Wyznaczyć macierze odwrotne do danych:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (ad - bc \neq 0); \quad c) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10 Rozwiązać równanie macierzowe:

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad b) X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$c) \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad d) 3X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} X.$$

Zadanie 11. Znaleźć rząd każdej z następujących macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12. Dla jakich wartości x rząd macierzy

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ jest równy } 3, \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ jest mniejszy od } 4.$$